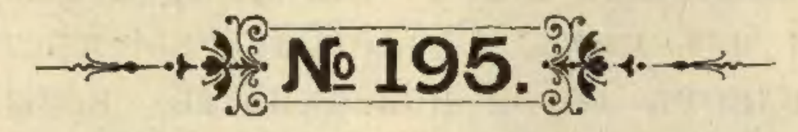
XVII Сем. 10-го сентября 1894 г. № 3.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



Отъ С.-Петербургскаго Комитета Грамотности.

До 1 сентября С.-Петербургскому Комитету Грамотности удалось собрать около 11.000 р. на устройство народныхъ читаленъ. Необходимо собрать еще около 10.000 р. ибо около 4.000 р. имѣется уже у разныхъ лицъ, но еще не представлены въ Комитетъ.

Слѣдуетъ надѣяться, что русское общество доставитъ Комитету эти деньги и тѣмъ во очію докажетъ, что въ немъ дѣйствительно сильно убѣжденіе въ томъ, что народное невѣжество есть одно изъ самыхъ тяжелыхъ бѣдствій, будучи само причиной большинства пережитыхъ и переживаемыхъ невзгодъ. Противодѣйствовать этому одними начальными школами немыслимо; милліоны грамотныхъ остаются безъ хорошей или даже безъ всякой книги. Грамотность можетъ оказаться прямо безполезной.

Пусть жертвователь не стѣсняется незначительностью своей лепты: 11.000 р. составились главнымъ образомъ изъ мелкихъ пожертвованій.

Пожертвованія книгами принимаются съ глубокой благодарностью.

Деньги и книги адресуются:

Комитетъ Грамотности, Забалканскій, 33. С.-Петербургъ.

О всѣхъ пожертвованіяхъ Комитетъ печатаетъ въ газ. „Русская Жизнь“, краткія же свѣдѣнія о сборѣ помѣщаются и въ другихъ органахъ.

Въ полученіи денегъ высылаются квитанціи.

И. д. Предсѣдателя *Г. Фальборкъ.*

Секретарь *Д. Протопоповъ.*

ОЧЕРКЪ
геометрической системы Лобачевскаго.

(Продолженіе).*

Положимъ теперь, что мы имѣемъ нѣкоторую прямую AB и точку M на ней. Черезъ каждую точку пространства проходитъ одна и только одна прямая, параллельная AB. Представимъ себѣ весь комплексъ этихъ параллелей и изъ точки M проведемъ сѣкущую равнаго наклона къ каждой изъ нихъ. Геометрическое мѣсто оконечностей этихъ сѣкущихъ представляетъ собой поверхность, называемую *„предѣльной поверхностью“* или *„орисферой“*. Точка M служитъ *„началомъ“*, прямая AB *„осью“* поверхности.

Послѣ детальнаго изслѣдованія предѣльной линіи изученіе предѣльной поверхности не представляетъ затрудненій.

a') Всякая хорда предѣльной линіи служитъ сѣкущей равнаго наклона по отношенію къ прямымъ, проходящимъ черезъ конечныя ея точки параллельно оси.

b') Всякая точка на предѣльной поверхности можетъ быть принята за начало и прямая, проходящая черезъ эту точку параллельно оси,—за ось.

Доказательство этихъ положеній отличается отъ доказательства тѣхъ-же положеній относительно предѣльной линіи только тѣмъ, что тамъ мы разсматриваемъ сѣкущія равнаго наклона, которыя принадлежатъ параллелямъ, расположеннымъ въ одной плоскости; здѣсь три параллели могутъ лежать въ одной и въ различныхъ плоскостяхъ.

c') Сѣченіе предѣльной поверхности плоскостью, проходящей черезъ ось, есть предѣльная линія.

Проведемъ черезъ точку M предѣльной поверхности и ось AB произвольную плоскость и въ этой плоскости построимъ предѣльную линію, имѣющую точку M началомъ и прямую AB осью. Пусть M' точка на этой кривой, а прямая A'B' проходитъ черезъ M' параллельно оси AB. Тогда прямая MM' (см. *a*) служитъ сѣкущей равнаго наклона для прямыхъ AB и A'B' и потому точка M' лежитъ на предѣльной поверхности и именно на линіи ея пересѣченія съ плоскостью. Наоборотъ, если точка M'' лежитъ на линіи пересѣченія предѣльной поверхности съ плоскостью, то ось A''B'', проходящая черезъ M'', лежитъ въ нашей плоскости. Такъ какъ при этомъ, по свойству (*a'*) предѣльной поверхности, хорда M'M'' служитъ сѣкущей равнаго наклона для прямыхъ AB и A''B'', то точка M'' лежитъ на предѣльной линіи, которая проходитъ черезъ точку M въ плоскости прямыхъ AB, A''B'' и имѣетъ эти прямыя осями. Предложеніе доказано.

d') Никакія три точки на предѣльной поверхности не могутъ лежать на одной прямой.

Въ самомъ дѣлѣ, если бы три точки предѣльной поверхности лежали на одной прямой, то мы провели бы плоскость черезъ эту прямую и ось, проходящую черезъ одну изъ этихъ точекъ. Въ сѣченіи съ

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики“ №№ 174, 178, 179, 183, 187, 188, 189, 190 и 194.

поверхностью мы получили бы предѣльную линію, три точки которой были бы расположены на одной прямой. Это невозможно (см. *d*).

e') Каждая ось пересѣкаетъ предѣльную поверхность въ одной и только въ одной точкѣ.

По самому опредѣленію предѣльной поверхности, на каждой прямой, параллельной оси, находится точка, принадлежащая поверхности. Другой точки пересѣченія быть не можетъ, потому что при такихъ условіяхъ предѣльная линія, которая служитъ пересѣченіемъ орисферы съ произвольной плоскостью, проходящей черезъ эту ось, пересѣкалась бы съ осью въ двухъ точкахъ (см. *e*).

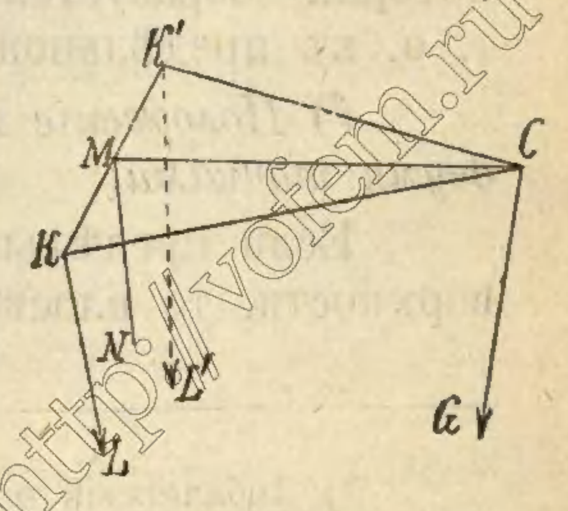
f') Плоскость, перпендикулярная къ оси въ конечной ея точкѣ, не встрѣчаетъ орисферы въ другой точкѣ и расположена цѣликомъ внѣ предѣльной поверхности.

Пусть K данная точка на оси и M произвольная точка на плоскости. Проведемъ плоскость черезъ прямую KM и ось, проходящую черезъ точку K. Въ сѣченіи мы получимъ предѣльную линію, прямая KM, будучи перпендикулярна къ оси, касается кривой въ точкѣ K (см. *f*). Точка M лежитъ, слѣдовательно, внѣ предѣльной линіи, а вмѣстѣ съ тѣмъ и внѣ орисферы.

Ввиду этого, плоскость, перпендикулярная къ оси въ конечной ея точкѣ, представляетъ собой *касательную* плоскость къ поверхности. Изъ этого видно, что предѣльная поверхность сѣчетъ ортогонально весь комплексъ осей*).

g') Если плоскость имѣетъ съ предѣльной поверхностью общую точку (K) и образуетъ съ осью, которая проходитъ черезъ эту точку, уголъ, отличный отъ 0 и отъ $\frac{\pi}{2}$, т. е. если она не заключаетъ этой оси и не перпендикулярна къ ней, то она пересѣкаетъ орисферу по окружности круга.

Такъ какъ ось KL (фиг. 11) не перпендикулярна къ плоскости, то черезъ точку K въ этой плоскости проходитъ безчисленное множество линій образующихъ съ осью острые углы. Пусть KM одна изъ такихъ прямыхъ. Черезъ прямую KM и ось KL проводимъ плоскость, которая пересѣчетъ орисферу по предѣльной линіи. Прямая KL, образующая съ осью острый уголъ, пересѣкаетъ предѣльную линію во второй разъ въ точкѣ K' (см. *g*). Когда прямая KM вращается въ данной плоскости вокругъ точки K, то точка K' чертитъ непрерывную линію сѣченія. Докажемъ, что эта линія представляетъ собой окружность круга. Положимъ, что K и K' двѣ произвольныя точки этого сѣченія. Проводимъ оси KL и K'L'. Мы видѣли выше (№ 194 стр. 30), что всѣ плоскости, проэктирующія на данную плоскость систему параллельныхъ прямыхъ, которыя эту плоскость встрѣчаютъ, пересѣкаются по прямой, параллельной этимъ прямымъ и перпендикулярной къ плоскости. Пусть LKC и L'K'C эти плоскости, CG прямая, по которой онѣ пересѣкаются. Черезъ середину M прямой KK' проводимъ MN



Фиг. 11.

*) Это свойство можетъ служить опредѣленіемъ орисферы. См. напр. Killing. „Einführung in die Grundlagen der Geometrie" (§ 14, *a*).

параллельно KL, K'L' и CG. Такъ какъ KK' служитъ хордой предѣльной поверхности, то она представляетъ собой сѣкущую равнаго наклона для прямыхъ KL и K'L'. Поэтому $MN \perp KK'$. Такъ какъ прямая MC представляетъ собой проэкцію MN на плоскость KK'C, то $KK' \perp MC$. Отсюда вытекаетъ, что прямоугольные треугольники KMC и K'MC равны и $KC = K'C$, т. е. всѣ точки сѣченія находятся на равномъ разстояніи отъ точки C. Когда прямая MK, оставаясь въ плоскости сѣченія, вращается вокругъ точки K, то точка K' описываетъ полную окружность.

Отсюда вытекаетъ, что плоскость всякой предѣльной линіи, проходящей черезъ какую нибудь точку на орисферѣ, заключаетъ ту ось поверхности, которая выходитъ изъ этой точки. Въ самомъ дѣлѣ, въ противномъ случаѣ эта плоскость пересѣкала бы поверхность не по предѣльной линіи, а по окружности круга.

h') Плоскость, перпендикулярная къ оси во внутренней точкѣ O, пересѣкаетъ орисферу по окружности круга.

Представимъ себѣ прямую OL, проходящую въ этой плоскости черезъ точку O. Черезъ ось OK и прямую OL проведемъ плоскость, которая разсѣчетъ орисферу по предѣльной линіи. Прямая OL, будучи перпендикулярна къ оси во внутренней точкѣ, пересѣчетъ, какъ мы видѣли, кривую въ двухъ точкахъ (см. *h*). Если мы проведемъ черезъ одну изъ этихъ точекъ ось, то она не будетъ заключаться въ данной плоскости, такъ какъ она лежитъ въ плоскости, проходящей черезъ ось OK и, слѣдовательно, перпендикулярной къ данной. Кромѣ того данная плоскость не можетъ касаться орисферы ибо часть ея расположена съ внутренней стороны поверхности. Слѣдовательно, она пересѣчетъ поверхность по окружности круга (см. *f'*).

Итакъ, если мы проведемъ систему плоскостей перпендикулярныхъ къ произвольной оси орисферы, но всѣ онѣ пересѣкутъ поверхность по окружностямъ. Слѣдовательно, предѣльная поверхность можетъ быть разсматриваема, какъ поверхность вращенія, при чемъ любая ось можетъ служить осью вращенія. Предѣльная кривая, которая служитъ меридіанальной линіей, играетъ роль образующей *).

Сфера представляетъ собой поверхность, которая образуется вращеніемъ окружности вокругъ одного изъ своихъ діаметровъ. Если радіусъ окружности неопредѣленно возрастаетъ, что она приближается къ предѣльной линіи. Сфера приближается, слѣдовательно, къ поверхности, которая образуется вращеніемъ предѣльной линіи вокругъ ея оси, т. е. къ предѣльной поверхности **).

i') *Положеніе предѣльной линіи на орисферѣ вполнѣ опредѣляется двумя точками.*

Если предѣльная линія расположена цѣликомъ на предѣльной поверхности, то плоскость кривой пересѣкаетъ поверхность именно по

*) Лобачевскій опредѣляетъ орисферу, какъ поверхность, которая получается отъ вращенія предѣльной линіи вокругъ одной изъ своихъ осей. „Новыя Начала" стр. 118.

**) Въ статьѣ Лобачевскаго „О Началахъ геометріи" это свойство орисферы служитъ ея опредѣленіемъ.

этой предѣльной линіи. Но мы видѣли (см. *c'*), что предѣльная линія, которая служитъ пересѣченіемъ орисферы съ плоскостью, имѣетъ съ поверхностью общія оси. Поэтому, если проведемъ плоскость, которая заключаетъ оси, проходящія черезъ двѣ точки по орисферѣ, то она пересѣчетъ предѣльную поверхность по единственной предѣльной линіи, которая проходитъ черезъ эти точки.

k') Три точки на орисферѣ расположены либо на одной предѣльной линіи, либо на одной окружности.

Такъ какъ эти три точки не могутъ лежать на одной прямой, то онѣ опредѣляютъ собой плоскость. Послѣдняя не можетъ касаться предѣльной поверхности, ибо имѣетъ съ ней три общія точки. Слѣдовательно, она либо проходитъ черезъ ось, либо образуетъ съ ней острый уголъ. Въ первомъ случаѣ сѣченіемъ служитъ предѣльная линія, во второмъ—окружность круга. На той или другой линіи расположены наши три точки. Въ послѣднемъ случаѣ перпендикуляръ, возставленный изъ центра круга къ его плоскости представляетъ собой ось поверхности. Это вытекаетъ изъ разсужденій пункта (*f'*).

l') Наоборотъ, черезъ всякія три точки, лежащія на одной предѣльной линіи, проходитъ одна и только одна предѣльная поверхность.

По самому опредѣленію орисферы, она вполнѣ опредѣляется одной точкой поверхности и осью. Если даны три точки на одной предѣльной линіи, то плоскость, которая ими опредѣляется пересѣчетъ орисферу, проходящую черезъ эти точки, по этой предѣльной линіи; въ самомъ дѣлѣ, эта плоскость не можетъ касаться поверхности и не можетъ пересѣкать ее по окружности, ибо три точки на одной предѣльной линіи не могутъ лежать на одной окружности. Слѣдовательно, она пересѣкаетъ поверхность по предѣльной кривой, которая проходитъ черезъ три длинныя точки. Такая кривая возможна лишь одна: черезъ двѣ точки, какъ мы видѣли, могутъ проходить только двѣ предѣльныя кривыя (симметричныя); если дана третья точка на той-же кривой, то послѣдняя вполнѣ опредѣлена. Вмѣстѣ съ этимъ опредѣляется ось орисферы и самая поверхность.

m') Черезъ всякія три точки, лежащія на одной окружности, могутъ проходить двѣ и только двѣ предѣльныя поверхности.

Пусть A, B и C данныя точки, O центръ окружности, проходящей черезъ эти точки. Изъ соображеній, изложенныхъ въ пунктѣ (*k'*) вытекаетъ, что перпендикуляръ OK, возставленный изъ центра треугольника къ его плоскости, необходимо служитъ осью орисферы, проходящей черезъ эти три точки, если таковая существуетъ. Но легко видѣть, что достаточно принять перпендикуляръ OK за ось и одну изъ данныхъ точекъ за начало, чтобы орисфера, опредѣляемая этими элементами, прошла черезъ остальныя двѣ точки. Въ самомъ дѣлѣ, при вращеніи предѣльной линіи имѣющей осью прямую OK и эту-же точку началомъ, образуетъ наша орисфера. Но при этомъ начало послѣдовательно совпадаетъ съ двумя другими данными точками, какъ и со всей окружностью, на которой онѣ расположены. Всѣ эти точки лежатъ слѣдовательно на поверхности. Но такъ какъ мы могли принять за ось перпендикуляръ какъ въ одномъ направленіи, такъ и въ противопо-

ложномъ, то такихъ поверхностей можетъ быть двѣ. Онѣ называются *симметричными*.

Изъ этого вытекаетъ, что *части орисферы допускаютъ передвиженіе вдоль по поверхности безъ деформаціи*. Въ самомъ дѣлѣ, перенесемъ какую-нибудь часть предѣльной поверхности такимъ образомъ, что три ея точки совпали съ тремя другими точками на той-же поверхности и чтобы при этомъ выпуклости были направлены въ одну сторону. При такихъ условіяхъ вся фигура совмѣстится съ конгруэнтной ей частью предѣльной поверхности, потому что черезъ три точки могутъ проходить двѣ предѣльныя поверхности только въ томъ случаѣ, если выпуклости направлены въ противоположныя стороны.

n') Будемъ разсматривать какую нибудь фигуру на орисферѣ, какъ часть неизмѣняемой среды, которая съ нею неразрывно связана. Орисфера представляетъ собой поверхность вращенія, при чемъ любая ея ось можетъ служить осью вращенія. Закрѣпимъ теперь произвольную точку нашей фигуры и станемъ вращать всю неизмѣняемую среду вокругъ оси, проходящей черезъ эту точку. При такихъ условіяхъ фигура будетъ вращаться, оставаясь на той же предѣльной поверхности, вокругъ неподвижной точки. Чтобы фиксировать положеніе фигуры достаточно закрѣпить еще одну ея точку, потому что неподижная прямая и точка, лежащая внѣ ея, вполнѣ опредѣляютъ положеніе неизмѣняемой среды, а вмѣстѣ съ тѣмъ и фигуры, которая съ ней неразрывно связана *).

Положеніе фигуры на орисферѣ вполнѣ опредѣляется двумя точками.

Изложенныя свойства орисферы заключаютъ въ себѣ матеріалъ, необходимый для построенія геомеріи этой поверхности.

Мы видѣли, что на орисферѣ существуютъ линейные образы, именно предѣльныя линіи, которыя вполнѣ опредѣляются двумя точками. Эти линіи могутъ замѣнить собой прямыя плоской геометріи. Основныя свойства, характеризующія эти образы слѣдующія:

α) Всѣ предѣльныя линіи тождественны (см. *i*).

β) Предѣльная линія на орисферѣ вполнѣ опредѣляется двумя точками (см. *i'*).

γ) Дуга предѣльной линіи можетъ быть продолжена неопредѣленно (см. *l*), и при этомъ не приводитъ въ точку исхода.

Эти положенія совпадаютъ съ основными принципами, которыми опредѣляется прямая на плоскости.

Угломъ между двумя предѣльными линіями называютъ двугранный уголъ между плоскостями, въ которыхъ онѣ лежатъ. При такихъ условіяхъ уголъ на орисферѣ будетъ въ томъ же смыслѣ служить инваріантомъ относительнаго положенія двухъ предѣльныхъ линій, въ какомъ онъ играетъ эту роль для прямыхъ на плоскости (см. „Вѣст." № 183 стр. 56).

*) Разбирая взгляды Лобачевскаго на начала геометріи, мы указывали, что это положеніе неявно подразумѣвается во всякой геометрической системѣ („Вѣст." № 183 стр. 57). Точнѣе, положеніе твердаго тѣла вполнѣ опредѣляется тремя точками, не лежащими на одной прямой.

Далѣе, фигура на поверхности орисферы можетъ передвигаться безъ деформаціи (см. m') и сохраняетъ при этомъ ту-же степень свободы, которой обладаютъ плоскія фигуры при перемѣщеніи по плоскости (см. n').

В. Каганъ (Спб.).

(Продолженіе слѣдуетъ).

ПРАКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРІЯ.

Шнуръ съ тремя кольцами.

(*Окончаніе* *).

Въ первой части этой замѣтки было показано, какъ при помощи шнура съ тремя равноудаленными на немъ кольцами строится на земной поверхности ромбъ и какъ на такое построеніе ромба сводится рѣшеніе слѣдующихъ простѣйшихъ землемѣрныхъ задачъ:

1) Дѣленіе даннаго угла пополамъ,

2) дѣленіе данной прямой пополамъ,

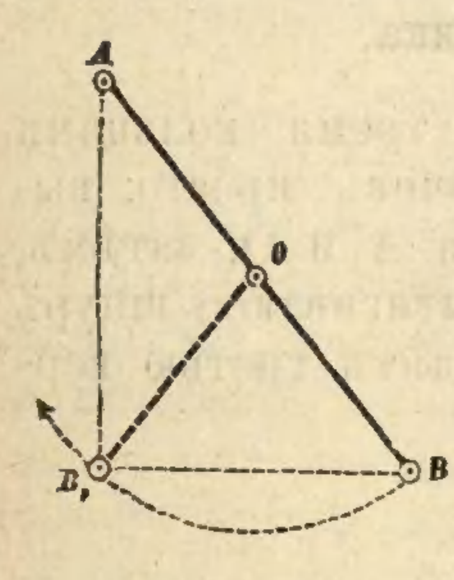
3) проведеніе черезъ данную точку прямой, параллельной данной прямой,

и 4) опусканіе перпендикуляра изъ данной точки на данную прямую въ томъ частномъ случаѣ, когда вѣтви шнура могутъ быть вытянуты по обѣ стороны отъ данной точки.

Переходимъ теперь къ задачамъ, сводящимся на второе элементарное употребленіе шнура, т. е. на

II. Построеніе прямоугольнаго треугольника.

Построеніе это, смотря по обстоятельсгвамъ, можетъ быть выполнено двумя способами:



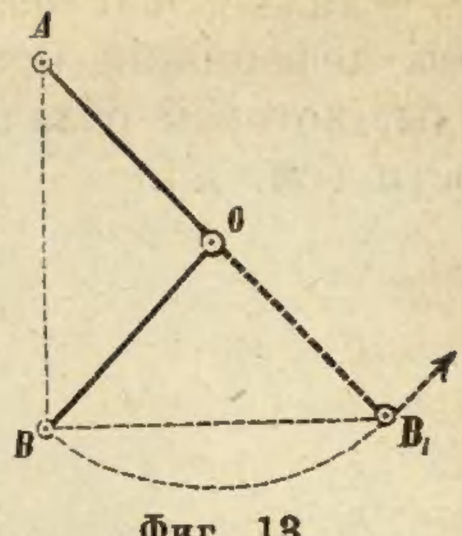
Фиг. 12.

а) Когда шнуръ вытянутъ въ прямую линію АОВ (фиг. 12), которая можетъ быть принята за гипотенузу искомаго прямоугольнаго треугольника, построеніе его достигается перенесеніемъ одного изъ крайнихъ колецъ, напр., В, въ одну изъ точекъ дуги BB_1, описанной около О какъ центра, напр., въ точку B_1; очевидно, что при любомъ положеніи точки B_1 будемъ имѣть $AB_1 \perp B_1B$.

б) Обратно, когда шнуръ имѣетъ положеніе нѣкоторой ломанной линіи АОВ (фиг. 13), одна изъ

---

*) См. „В. О. Ф.“ № 181, сем. XVI, стр. 13—16.



Фиг. 13.

конечныхъ точекъ которой, напр. B, можетъ быть принята за вершину прямого угла, построеніе прям. треугольника выполняется перенесеніемъ кольца B, по дугѣ BB_1, въ ту точку B_1, которая лежитъ на одной прямой съ неподвижными кольцами A и O.

Вторымъ изъ указанныхъ построеній (II, *б*) рѣшается задача:

5) Изъ точки, данной на прямой, возставить къ ней перпендикуляръ.

Пусть данная точка есть B (фиг. 13), а данная прямая—совпадаетъ съ направленіемъ AB; вбиваемъ колъ B, произвольно на данной прямой вбиваемъ колъ A и, надѣвъ крайнія кольца и вытянувъ шнуръ въ ломанную AOB, вбиваемъ третій колъ O и строимъ затѣмъ, какъ указано, прямоугольный треугольникъ; четвертый колъ B_1 опредѣляетъ очевидно, направленіе искомаго перпендикуляра BB_1.

NB. Задачу эту можно еще рѣшить и такъ: пусть данная точка есть C; отложивъ по обѣ ея стороны на данной прямой равные отрѣзки $CM = CN$, надѣваемъ на колья M и N крайнія кольца и, придавъ шнуру въ требуемомъ направленіи положеніе вытянутой ломанной MON, найдемъ точку O, которая опредѣлитъ направленіе перпендикуляра OC къ данной прямой MN. Такое построеніе, однакожъ, менѣе удобно, ибо требуетъ откладыванія равныхъ отрѣзковъ.

Первое построеніе прям. треуг. (II, *a*) примѣняется къ рѣшенію задачи 4-ой (см. выше) въ томъ случаѣ, когда вѣтви шнура не могутъ быть вытянуты по обѣ стороны отъ данной точки.

Построивъ—если это требуется—рядъ вспомогательныхъ параллелей способомъ, указаннымъ при рѣшеніи задачи 4-й въ общемъ случаѣ*), надѣваютъ затѣмъ одно изъ крайнихъ колецъ на колъ, вбитый въ данную точку A (фиг. 12), и вытягиваютъ шнуръ такъ, чтобы второе его крайнее кольцо B находилось на послѣдней параллели (или на данной прямой). Послѣ этого для опредѣленія направленія искомаго перпендикуляра изъ A на данную прямую остается построить, какъ указано выше, прям. треугольникъ AB_1B.

III. Построеніе равносторонняго треугольника.

Третье основное примѣненіе нашего шнура съ тремя кольцами есть построеніе равносторонняго треугольника. Оно очень просто: вытянувъ половину шнура, напр. AO, вбиваютъ колья A и O; затѣмъ, надѣвъ на колъ O второе свободное крайнее кольцо, вытягиваютъ шнуръ за среднее кольцо въ ту либо другую сторону и находятъ третью вершину равносторонняго треугольника AOO′.

Этимъ построеніемъ рѣшается задача:

6) Построить уголъ въ 60°.

Такъ какъ при помощи построенія ромба легко всякій уголъ раздѣлить пополамъ, а при помощи II и III построеній умѣемъ строить

*) См. „В. О. Ф.“ № 181, стр. 16.

углы въ 90° и 60°, то можемъ, слѣдовательно, считать рѣшенными такія задачи, какъ построеніе на землѣ угловъ: въ 45°, $22\frac{1}{2}$,.... въ 30°, 15°,.... а также—трисекцію прямого угла.

Прибавимъ къ тому, что задача

7) Удвоить данный уголъ

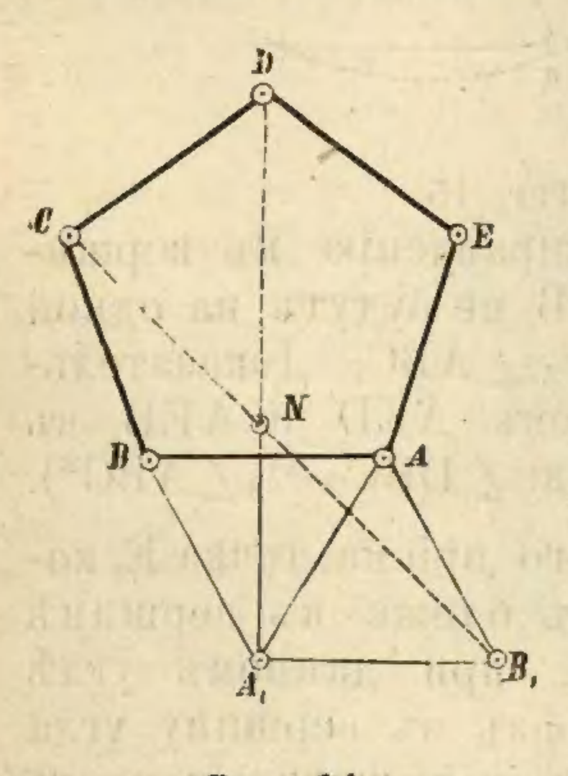
рѣшается весьма просто при помощи I построенія, а именно: пусть, напримѣръ, требуется удвоить уголъ DBE; въ вершинѣ B и на одной изъ сторонъ вбиваемъ колья B и O для крайняго и средняго колецъ шнура; второе крайнее кольцо A закрѣпляемъ при помощи кола на другой сторонѣ даннаго угла, и затѣмъ строимъ ромбъ, перенеся кольцо O въ положеніе O_1; прямая BO_1 дастъ искомую сторону удвоеннаго угла.

Сумму и разность такихъ двухъ угловъ, которые умѣютъ строить при помощи шнура, легко найти на основаніи свойствъ внѣшняго угла треугольника.

Такимъ образомъ и безъ угломѣрнаго инструмента или транспортира можно, пользуясь однимъ лишь шнуромъ съ тремя кольцами, строить на землѣ различные углы заданнаго числа градусовъ.

IV. Пятиугольникъ Дюрера.

Такъ называется *почти* правильный пятиугольникъ, который строится при помощи линейки и одного раствора циркуля. На земной поверхности его не трудно построить при помощи нашего шнура слѣдующимъ образомъ. Принявъ половину шнура AB за одну изъ сторонъ, строимъ на ней равносторонній треугольникъ ABA_1 (фиг. 14) а потомъ—ромбъ ABA_1B_1; изъ A_1 опускаемъ перпендикуляръ на сторону AB и откладываемъ на немъ половину шнура $A_1N = AB$. Въ точкахъ N и B_1 вбиваемъ колья и, надѣвъ одно изъ крайнихъ колецъ на колъ B, вытягиваемъ половину шнура такъ, чтобы среднее кольцо C находилось на продолженіи прямой B_1N; закрѣпивъ кольцо C, вытягиваемъ вторую половину шнура такъ, чтобы его второе крайнее кольцо D пришлось на продолженіи перпендикуляра A_1N; наконецъ, освободивъ кольца C и B, переносимъ кольцо B въ точку A и вытянувъ шнуръ за среднее кольцо, найдемъ послѣднюю вершину пятиугольника E.



Фиг. 14.

Хотя всѣ стороны такого пятиугольника равны, но углы не равны, и потому его нельзя назвать правильнымъ. Именно: каждый изъ угловъ A и B равенъ 108°22′; углы C и E равны, каждый, 107°2′ и наконецъ уголъ D равенъ 109°12′*).

Такъ какъ углы A и B лишь немногимъ больше 108°, то вышеу-

*) См. доказательство въ № 25 „В. О. Ф.“, сем. Ш, стр. 24.

казаннымъ построеніемъ можно рѣшить съ достаточною для практики точностью задачу:

8) Построить уголъ въ 108° или 72° (а также въ 54°, 36°, 126°, 144° и пр.).

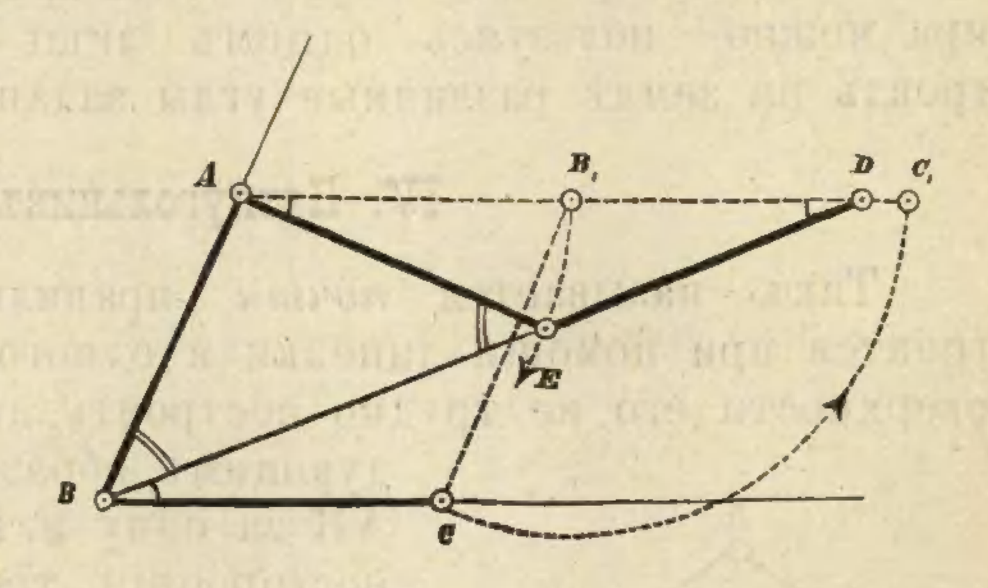
Послѣ этого можемъ также считать рѣшенною задачу:

9) Раздѣлить данную прямую въ крайнемъ и среднемъ отношеніи,

ибо для этой цѣли достаточно построить въ конечныхъ точкахъ данной прямой углы въ 36° каждый и одну изъ равныхъ сторонъ полученнаго такимъ образомъ равнобедреннаго треугольника отложить на данной прямой.

V. Трисекція угла.

При помощи кольевъ и шнура съ тремя кольцами можно вполнѣ точно раздѣлить данный уголъ на три равныя части. Это дѣлается слѣдующимъ образомъ. Пустъ данъ на землѣ уголъ ABC (фиг. 15); строимъ въ немъ ромбъ $ABCB_1$ и послѣ этого выпрямляемъ шнуръ по направленію AB_1C_1 (т. е. переносимъ кольцо C въ C_1). Затѣмъ одинъ изъ участниковъ построенія, съ кольцомъ C_1 въ рукахъ, идетъ отъ C_1 къ B_1 по направленію кольевъ A и B_1, а другой, натягивая шнуръ за среднее кольцо B_1, идетъ съ нимъ по дугѣ B_1E до тѣхъ поръ, пока крайнее кольцо у перваго и среднее —у второго не вытянутъ эту вѣтвь шнура по направленію къ вершинѣ угла B, т. е. пока кольца D и E и вершина B не будутъ на одной прямой. Тогда прямая BED отсѣчетъ $\angle DBC = \frac{1}{3} \angle ABC$. Доказательство очевидно изъ равнобедренности треугольниковъ AED и AEB, въ коихъ $\angle D = \angle DBC = \frac{1}{2} \angle AEB = \frac{1}{2} \angle ABE$; отсюда: $\angle DBC = \frac{1}{3} \angle ABC$*).



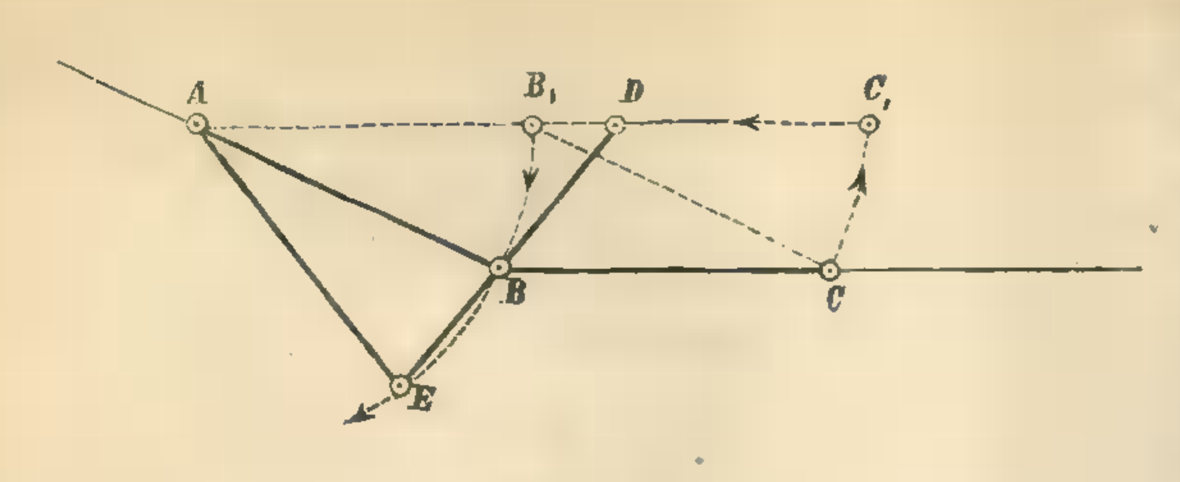
Фиг. 15.

Интересно замѣтить, что при примѣненіи этого пріема, точка E, которая должна лежать на прямой BD, будетъ тѣмъ ближе къ вершинѣ угла B, чѣмъ больше данный уголъ, и, наконецъ, при данномъ углѣ ABC = 135° (т. е. $\frac{3}{2}$ d) точка E упадетъ какъ разъ въ вершину угла B. Слѣдовательно и наоборотъ: если при примѣненіи вышеизложеннаго пріема трисекціи угла окажется, что точка E (т. е. среднее кольцо шнура) упадетъ въ вершину даннаго угла, то это будетъ признакомъ, что данный уголъ равенъ 135°, т. е. что его третья часть равна углу въ 45, который мы и безъ того умѣемъ строить какъ половину прямого угла.

Когда же данный уголъ больше 135°, какъ напримѣръ ABC на

---

*) Въ упоминаемой мною выше статьѣ Д-ра Штрейта „Rautengeometrie" данъ нѣсколько иной способъ примѣненія шнура къ трисекціи угла, менѣе общій, ибо пригодный лишь для того случая, когда данный уголъ тупой.



Фиг. 16.

фиг. 16, то, примѣняя тотъ же пріемъ, убѣдимся, что точка E упадетъ внѣ угла ABC, и при этомъ прямая EBD по прежнему раздѣлитъ данный уголъ въ отношеніи 1:2, ибо изъ равнобедренныхъ треугольниковъ AED и AEB имѣемъ:

$$\angle AED = 180^0 - 2\angle ADE = 180^0 - 2\angle DBC$$

$$\angle AED = \angle ABE = 180^0 - \angle ABD$$

откуда:

$$\angle ABD = 2\angle DBC.$$

Ш.

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ МЕЛОЧИ.

Одинъ изъ способовъ рѣшенія совмѣстныхъ уравненій (способъ замѣны).

Возьмемъ два совмѣстныхъ уравненія:

$$12x + 15y = 8 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$16x + 9y = 7 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Помноживъ уравненіе (1) на 7, а (2) на 8, получимъ уравненія:

$$84x + 105y = 56,$$

$$128x + 72y = 56,$$

на основаніи чего можемъ написать:

$$84x + 105y = 128x + 72y \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Положимъ теперь, что $y = xm$. Замѣнивъ въ уравненіи (3) y его значеніемъ, получимъ:

$$84x + 105xm = 128x + 72xm \quad . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Сокращаемъ уравненіе (4) на x:

$$84 + 105m = 128 + 72m$$

Рѣшая полученное уравненіе относительно m, находимъ $m = {}^4/_3$.

Теперь подставляемъ въ уравненіе (1) вмѣсто y его значеніе xm, т. е. ${}^4/_3\,x$ и рѣшаемъ его относительно x. Получимъ: $x = {}^1/_4$; $y = mx = {}^1/_3$.

Рѣшимъ теперь въ общемъ видѣ систему изъ k уравненій съ k неизвѣстными и выведемъ общее правило. Приведя данныя уравненія къ простѣйшему виду и перенеся въ нихъ извѣстные члены въ одну часть, неизвѣстные въ другую, будемъ имѣть:

$$a_1x + a_2y + a_3z + \dots\dots\dots + a_ku = A \dots\dots (1)$$
$$b_1x + b_2y + b_3z + \dots\dots\dots + b_ku = B \dots\dots (2)$$
$$c_1x + c_2y + c_3z + \dots\dots\dots + c_ku = C \dots\dots (3)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$h_1x + h_2y + h_3z + \dots\dots\dots + h_ku = H \dots\dots (k-1)$$
$$k_1x + k_2y + k_3z + \dots\dots\dots + k_ku = K \dots\dots (k)$$

Уравниваемъ вторыя части уравненій (1) и (2); пусть для этого уравненіе (1) надо помножить на β, уравненіе (2)—на α. Тогда получимъ:

$$\beta a_1x + \beta a_2y + \beta a_3z + \dots + \beta a_ku = \alpha b_1x + \alpha b_2y + \alpha b_3z + \dots + \alpha b_ku.$$

Предположимъ, что второе неизвѣстное $y = xm$, третье $z = xn$ и т. д., наконецъ $u = xt$. Замѣнивъ въ полученномъ уравненіи неизвѣстныя ихъ значеніями, сократимъ его на x:

$$\beta a_1 + \beta a_2m + \beta a_3n + \dots + \beta a_kt = \alpha b_1 + \alpha b_2m + \alpha b_3n + \dots + \alpha b_kt \dots (\alpha)$$

Получилось уравненіе (α) съ $k-1$ неизвѣстными: $m, n \dots t$.

Произведя тѣ же самыя дѣйствія надъ всѣми уравненіями попарно, получимъ:

$$\delta b_1 + \delta b_2m + \delta b_3n + \dots + \delta b_kt = \gamma c_1 + \gamma c_2m + \gamma c_3n + \dots + \gamma c_kt \dots (\beta)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\varphi h_1 + \varphi h_2m + \varphi h_3n + \dots + \varphi h_kt = \psi k_1 + \psi k_2m + \psi k_3n + \dots + \psi k_kt \dots (\lambda)$$

Уравненія (α), (β) . . . . . (λ) представляютъ собою систему изъ $k-1$ уравненій съ $k-1$ неизвѣстными, которая послѣ приведенія подобныхъ членовъ представится въ видѣ:

$$(\beta a_2 - \alpha b_2)m + (\beta a_3 - \alpha b_3)n + \dots + (\beta a_k - \alpha b_k)t = \alpha b_1 - \beta a_1,$$
$$(\delta b_2 - \gamma c_2)m + (\delta b_3 - \gamma c_3)n + \dots + (\delta b_k - \gamma c_k)t = \gamma c_1 - \delta b_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(\varphi h_2 - \psi k_2)m + (\varphi h_3 - \psi k_3)n + \dots + (\varphi h_k - \psi k_k)t = \psi k_1 - \varphi h_1.$$

Поступая съ полученной системой по предыдущему и повторяя тѣ же дѣйствія достаточно долго, т. е. $k-1$ разъ, дойдемъ наконецъ до одного уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ.

Итакъ, чтобы рѣшить систему изъ k уравненій по способу замѣны, приводимъ данныя уравненія къ простѣйшему виду, переносимъ въ нихъ извѣстные члены въ одну часть, а члены, содержащіе неизвѣстныя въ другую; беремъ уравненія попарно первое со вторымъ, второе съ третьимъ и т. д., или же первое со вторымъ, первое съ третьимъ и т. д. Въ каждой парѣ уравненій уравниваемъ вторыя (извѣстныя) части, для чего нужно для нихъ найти общее наименьшее кратное, дѣлить его на извѣстную часть каждаго уравненія и на полученное частное помножать все уравненіе. Потомъ первыя части въ каждой парѣ уравненій соединяемъ знакомъ равенства и такимъ образомъ полу-

чаемъ новую систему изъ $k-1$ уравненій. Предполагаемъ, что второе неизвѣстное количество y равно первому x, помноженному на нѣкоторое количество m; третье неизвѣстное $z=xn$ и т. д. Замѣнивъ во всѣхъ нашихъ уравненіяхъ неизвѣстныя ихъ значеніями, сокращаемъ ихъ на x. Надъ полученной системой $k-1$ уравненій съ $k-1$ неизвѣстными совершаемъ тѣ же дѣйствія и повторяемъ ихъ до тѣхъ поръ, пока не получимъ одного уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ. Опредѣливъ отсюда послѣднее вспомогательное неизвѣстное количество, подставляемъ его въ предыдущее уравненіе, чтобы опредѣлить предшествующее неизвѣстное. Нужно замѣтить, что, когда два вспомогательныя количества уже извѣстны, то всѣ остальныя найдутся непосредственно, такъ какъ каждое изъ нихъ есть обратное отношеніе двухъ предыдущихъ.

Когда всѣ вспомогательныя неизвѣстныя найдены, подставляемъ ихъ въ одно изъ основныхъ уравненій и опредѣляемъ первое неизвѣстное системы; всѣ остальныя найдутся непосредственно.

Изъ хода рѣшенія видно, что въ данной системѣ всѣ уравненія необходимо должны имѣть извѣстный членъ; поэтому, если какое-нибудь изъ нихъ его не имѣетъ, то, чтобы возможно было рѣшить систему, нужно къ этому уравненію прибавить или изъ него вычесть какакое-нибудь другое уравненіе, смотря по тому, что удобнѣе. Тогда всѣ уравненія системы будутъ имѣть извѣстный членъ.

Если же ни одно уравненіе не имѣетъ извѣстнаго члена, то въ такомъ случаѣ рѣшеніе значительно упрощается, такъ какъ не является надобности уравнивать вторыя части.

К. Зновицкій (Кіевъ).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Новое явленіе при прохожденіи электричества черезъ плохо проводящія жидкости. При прохожденіи тока черезъ хорошо проводящія жидкости явленія разложенія замѣчаются лишь у электродовъ. Остальная часть жидкости повидимому не претерпѣваетъ никакого измѣненія. Въ послѣднее время извѣстный ученый О. Леманнъ (Lehmann) произвелъ рядъ весьма интересныхъ наблюденій надъ плохими проводниками тока. Если пропустить токъ въ 70 вольтъ черезъ водный растворъ краснаго красящаго вещества конго, то у каждаго электрода замѣчается рѣзко ограниченное пространство, голубого цвѣта у анода, у катода же окрашенное не столь интенсивно, какъ остальная жидкость, но рѣзко отдѣленное отъ нея темнымъ контуромъ. Оба эти пространства увеличиваются и наконецъ приходятъ въ соприкосновеніе по срединѣ жидкости. Тотчасъ же здѣсь, въ срединѣ жидкости, образуется со стороны анода темносиній осадокъ, со стороны же катода жидкость обезцвѣчивается; одновременно съ этимъ въ срединѣ жидкость начинаетъ какъ бы волноваться. Всѣ эти явленія происходятъ лишь въ средней части жидкости, на небольшомъ сравнительно пространствѣ. Остальная масса жидкости остается совершенно спокойной. Кромѣ того, въ томъ мѣстѣ,

гдѣ осаждается красящее вещество и жидкость приходитъ въ волненіе, замѣчается значительное повышеніе температуры (на 8°).

Чѣмъ выше напряженіе тока, тѣмъ быстрѣе происходятъ всѣ эти явленія. Прибавленіе къ раствору сахара, желатины или глицерина замедляетъ явленіе.

Всѣ описанныя явленія наблюдались первоначально подъ микроскопомъ, но ихъ можно видѣть и простымъ глазомъ, если прибавить къ раствору столько желатины, чтобы онъ обратился въ мягкій комокъ. Электродами служатъ платиновыя проволоки, которыя втыкаются въ такой комъ. Подобныя явленія обнаружены и на другихъ растворахъ (Zeitschr. f. phys. Chem.). *В. Г.*

Вязкость расплавленной сѣры. Уже Дюма (1821) и Сенъ Клеръ Девиль (1856) замѣтили, что при нагрѣваніи расплавленной сѣры вязкость ея сперва уменьшается, а затѣмъ, когда температура подымется выше 150°, быстро увеличивается, такъ что при 180° сѣра превращается въ тягучую массу, не выливающуюся изъ сосуда при его опрокидываніи. Желая точнѣе изслѣдовать это явленіе, J. Brunhes и J. Dussy заставляли протекать при различныхъ температурахъ опредѣленный объемъ сѣры подъ опредѣленнымъ давленіемъ сквозь капиллярную трубку съ просвѣтомъ въ 1 mm діаметра, и измѣряли потребное для этого время. Такимъ образомъ они установили, что скорость истеченія сѣры при нагрѣваніи ея отъ 115,5° до 156° или 157° увеличивается почти вдвое (точнѣе въ 1,796 раза). Затѣмъ она очень быстро уменьшается, такъ что уже при 162° сѣра не проходитъ вовсе сквозь трубку съ діаметромъ въ 1 mm даже подъ давленіемъ 700 mm ртутнаго столба. Если сравнить скорость истеченія сѣры со скоростью истеченія воды, то оказывается, что скорость истеченія сѣры при 115,5° составляетъ $^1/_{20}$ скорости истеченія воды при 25,5° (точнѣе 0,0518), для сѣры же при 156° это отношеніе увеличивается до 0,093 (maximum скорости истеченія). Вторая половина явленія, т. е. minimum скорости истеченія и вторичное плавленіе сѣры, авторами еще не обслѣдованы вполнѣ. *В. Г.*

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

На **Физико-Математическихъ Педагогическихъ Курсахъ**, учрежденныхъ въ прошломъ году въ г. Одессѣ для приготовленія учителей физики и математики для среднихъ учебныхъ заведеній, чтеніе лекцій началось 6-го сентября. Изъ лицъ, окончившихъ въ текущемъ году Новороссійскій университетъ по Математическому Отдѣленію физико-математическаго факультета, поступило на курсы 5 человѣкъ. Въ составъ преподавателей вошли: проф. Ѳ. Н. Шведовъ, проф. И. В. Слешинскій, проф. И. М. Занчевскій, проф. Н. Д. Пильчиковъ, проф. Н. Н. Ланге, директоръ Одесскаго реальнаго училища при церкви Св. Павла Н. А. Каминскій и редакторъ-издатель „В. О. Ф.“ Э. К. Шпачинскій. Завѣдывающимъ занятіями на курсахъ,состоитъ, по прежнему, проф. Слешинскій и секретаремъ совѣта—г. Шпачинскій.

-◈- Обращаемъ вниманіе нашихъ читателей на помѣщенное въ настоящемъ № воззваніе С.-Петербургскаго Комитета Грамотности на сборъ пожертвованій для устройства, при содѣйствіи земствъ, 100 безплатныхъ народныхъ читаленъ. До 1-го сентября собрано почти 11 тысячъ рублей. (Въ декабрѣ 1893 г. — 138 р.; въ 1894 г.: въ январѣ —1915 р., въ февралѣ — 1087 р. 4 к., въ мартѣ — 1665 р. 4 к., въ апрѣлѣ—2000 р. 48 к., въ маѣ—2803 р. 89 к., въ іюнѣ, іюлѣ и августѣ—1315 р. 12 к., всего же по 1-е сентября текущаго года собрано 10924 р. 57 к.).

-◈- **Крупный подарокъ** сдѣлалъ американскій богачъ M. A. Ryerson университету въ Чикаго. Подарокъ этотъ—большая физическая лабораторія, стоившая 250,000 долларовъ (Ryerson-Physical-Laboratory).

-◈- **Скончался** въ началѣ августа профессоръ химіи въ Цюрихскомъ университетѣ Карлъ Гейманнъ, 43-хъ лѣтъ.

ДОСТАВЛЕННЫЯ ВЪ РЕДАКЦІЮ КНИГИ И БРОШЮРЫ.

Основныя дѣйствія надъ періодическими десятичными дробями. *Н. Соколова.* Спб. 1894.

Значеніе изслѣдованій Н. И. Лобачевскаго въ геометріи и ихъ вліяніе на ея дальнѣйшее развитіе. Рѣчь, произнесенная въ торжественномъ собраніи Кіевскаго Физико-Математическаго Общества 22 октября 1893 года. *Н. П. Соколова.* Кіевъ. 1894. Ц. 40 к.

Узаконенія о безплатныхъ народныхъ библіотекахъ (читальняхъ) съ приложеніемъ примѣрныхъ ихъ уставовъ, составленныхъ С.-Петербургскимъ Комитетомъ Грамотности. Второе дополненное изданіе. Спб. 1894. Ц. 10 к.

Отчетъ о дѣятельности состоящаго при Императорскомъ Вольномъ Экономическомъ Обществѣ С.-Петербургскаго Комитета Грамотности за 1893 годъ. Спб. 1894.

Новѣйшая метода или русско-нѣмецкій учебникъ для обученія въ три мѣсяца нѣмецкому чтенію, письму и разговору безъ помощи учителя. *Плято ф. Рейсснера.* Низшій курсъ. X изданіе. Спб., Варшава, Москва. 1894. 1-й выпускъ. Ц. 20 к.

Курсъ химической технологіи. *Н. А. Бунге.* Профессора университета св. Владиміра. Выпускъ I. Вода. Топливо и отопленіе. Освѣщеніе. Съ 138 политипажами работы ксилографа Я. Езерскаго въ Кіевѣ. Кіевъ. 1894. Ц. 3 р. 30 к.

ЗАДАЧИ НА ИСПЫТАНІЯХЪ ЗРѢЛОСТИ ВЪ 18^92/93 Г.

Одесскій Учебный Округъ.

Маріупольская гимназія.

По алгебрѣ.—Число картъ въ колодѣ равно показателю степени бинома, въ разложеніи котораго коэффиціентъ третьяго отъ конца чле-

на равенъ 496. Сколькими способами могутъ расположиться карты въ колодѣ такъ, чтобы одноименныя карты всѣхъ мастей лежали рядомъ?

По геометріи.—Вычислить объемъ прямого конуса, вписаннаго въ шаръ, центръ котораго дѣлитъ высоту конуса внутренне въ крайнемъ и среднемъ отношеніи и радіусъ котораго имѣетъ столько футовъ, сколько градусовъ имѣетъ наименьшій уголъ x, опредѣляемый уравненіемъ

$$\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Николаевская гимназія.

По алгебрѣ.—Бассейнъ наполняется водою черезъ 3 трубы въ $2^{82}/_{85}$ часа; первая труба, дѣйствуя отдѣльно, могла бы наполнить весь бассейнъ въ 9 часовъ; вторая же, дѣйствуя отдѣльно, могла бы наполнить бассейнъ на 5 часовъ скорѣе, чѣмъ третья. Во сколько часовъ наполняютъ бассейнъ отдѣльно вторая и третья трубы?

По геометріи.—Въ треугольникѣ даны: основаніе $b=18{,}135$ фут. и прилежащіе къ нему углы $\alpha = 35^0 18' 42''$ и $\beta = 90^0 + \alpha$. Опредѣлить объемъ тѣла, полученнаго отъ вращенія этого треугольника около его высоты.

Одесская 1-я (Ришельевская) гимназія.

По алгебрѣ.—Ремонтеру предписано купить на 12560 руб. лошадей, платя по 170 руб. за артиллерійскую и 105 руб. за обозную, съ тѣмъ чтобы общее число лошадей не превышало 100. Сколько лошадей можетъ быть куплено?

По геометріи.—Опредѣлить объемъ правильной двѣнадцатиугольной пирамиды по даннымъ: площадь основанія пирамиды равна 16 кв. фут., уголъ наклоненія бокового ребра къ плоскости основанія равенъ $23^0 18' 12''$.

Одесская 2-я гимназія.

По алгебрѣ.—Двѣ артели рабочихъ получили 364 руб. Въ одной артели каждый рабочій получилъ столько рублей, сколько членовъ въ ариѳметической прогрессіи, которой $u_3+u_5=30$; $u_4+u_8=46$. Сумма членовъ$=595$; въ другой артели каждый работникъ получалъ столько рублей, сколько членовъ въ возрастающей геометрической прогрессіи, въ которой $u_2+u_4=30$, $u_8-u_4=360$. Сумма членовъ 12285. Сколько работниковъ было въ каждой артели?

По геометріи.—Найти выраженіе для полной поверхности и объема тѣла, происшедшаго отъ вращенія равнобедреннаго треугольника около одной изъ равныхъ сторонъ его, какъ около оси, если основаніе этого треугольника $= a$ дюймовъ, а противоположный ему уголъ $= \alpha^0$. Вычислить искомые объемъ и поверхность при $a=6$ дюйм. и $\alpha=85^0 12' 48''$.

Одесская 3-я гимназія.

По алгебрѣ.—Второй и пятый члены возрастающей кратной прогрессіи соотвѣтственно равны корнямъ уравненія

$$x^2-105x+1944=0.$$

Сколько нужно взять членовъ, начиная съ перваго, чтобы ихъ сумма была равна наименьшему изъ всѣхъ цѣлыхъ чиселъ, которыя, при дѣленіи на 29 даютъ въ остаткѣ 8, а при дѣленіи на 41 даютъ въ остаткѣ 6?

По геометріи.—Дана прямая призма, въ основаніи которой равнобочная трапеція съ острымъ угломъ $35^0 15' 18''$ и съ боковою стороною въ 5 фут., равною одной изъ параллельныхъ сторонъ. Опредѣлить объемъ этой призмы, если діагональ ея съ діагональю основанія образуетъ уголъ въ $17^0 37' 39''$.

Симферопольская гимназія.

См. „Вѣстникъ Оп. Физики" № 170 стр. 42.

Херсонская гимназія.

По алгебрѣ.—Опредѣлить цѣлыя и положительныя значенія неизвѣстныхъ въ уравненіи

$$ax+by=c,$$

если коэффиціентъ a равенъ четвертому члену, а b=9 члену ариѳметической прогрессіи, у которой разность 2,2, а сумма первыхъ 9 членовъ$=100^4/_5$; $c=547$.

По геометріи.—Равнобедренный треугольникъ съ равной стороной a и угломъ при вершинѣ α вращается около оси, проходящей внѣ его параллельно высотѣ на разстояніи равномъ длинѣ радіуса круга описаннаго. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія и произвести вычисленія, полагая, что $a=38{,}575$; уголъ $\alpha=75^0 30' 30''$.

Ѳеодосійская гимназія.

По алгебрѣ.—Сумма цыфръ трехзначнаго числа, составляющихъ ариѳметическую прогрессію, равна 9; произведеніе послѣдней изъ нихъ на сумму двухъ первыхъ равно 20. Опредѣлить трехзначное число.

По геометріи.—Вычислить объемы прямого кругового цилиндра и вписанной въ него 26-угольной призмы, если общая высота обоихъ тѣлъ въ 15 разъ больше радіуса основанія цилиндра r, равнаго $\sqrt[3]{0{,}007}$ дюйм.

ЗАДАЧИ.

№ 89. Провести окружность, касательную къ данной окружности въ данной точкѣ M и пересѣкающую вторую данную окружность такъ, чтобы хорда сѣченія была равна данной прямой m.

С. Копровскій (с. Дяткевичи).

№ 90. Построить треугольникъ по данной суммѣ квадратовъ разстояній центровъ внутренняго и внѣшнихъ вписанныхъ круговъ отъ

центра описаннаго круга, по данной сторонѣ и по данной суммѣ или разности квадратовъ двухъ другихъ сторонъ.

П. Хлѣбниковъ (Тула).

№ 91. Данъ треугольникъ ABC. Другой треугольникъ AMN, подобный ABC, имѣетъ съ нимъ общій уголъ A; сторона, сходственная съ BC, пересѣкаетъ ее въ точкѣ O, дѣлящей BC въ отношеніи $m:n$. По даннымъ сторонамъ треугольника ABC опредѣлить стороны треугольника AMN.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 92. Рѣшить систему

$$x+y=u+v,$$
$$xy+uv=27,$$
$$x^2+y^2+u^2+v^2=74,$$
$$x^4+y^4+u^4+v^4=2018.$$

С. Гирманъ (Кіевъ).

№ 93. Рѣшить уравненіе

$$[\sin(x-\alpha)+\cos(x+2\alpha)\sin\alpha]^2=4\sin\alpha.\cos x.\sin(x+\alpha).$$

(Заимств.) *Д. Е.* (Ив.-Вознес.).

№ 94. Внутри равносторонняго сферическаго треугольника ABC найти точку M при условіи, что сумма

$$\cos\smile AM+\cos\smile BM+\cos\smile CM$$

есть maximum.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 12 (3 сер.). Опредѣлить площадь треугольника по радіусамъ внутренняго вписаннаго и внѣ вписанныхъ въ него круговъ.

Если r—радіусъ внутренняго вписаннаго въ треугольникъ круга, а $\varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$ — радіусы внѣшнихъ вписанныхъ круговъ, то, очевидно, получимъ

$$\triangle=(a+b+c)\,{}^r/_2=(b+c-a)\,{}^{\varrho_a}/_2=(a+c-b)\,{}^{\varrho_b}/_2=(a+b-c)\,{}^{\varrho_c}/_2,$$

гдѣ $\triangle$ есть искомая площадь треугольника, а a, b, c — его стороны.

Перемножая эти равенства, найдемъ, что

$$\triangle^4=\frac{r\varrho_a\varrho_b\varrho_c}{2^4}(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c),$$

или

$$\Delta^4 = r\varrho_a\varrho_b\varrho_c\Delta^2,$$

откуда

$$\Delta = \sqrt{r\varrho_a\varrho_b\varrho_c}.$$

И. Ходановичъ, Н. Шебалинъ (Кіевъ); *К. Щиголевъ* (Курсъ); *В. Шидловскій, А. Шантыръ* (Полоцкъ); *П. Бѣловъ* (с. Знаменка); *К.* и *Θ.* (Тамбовъ); *П. Ивановъ* (Одесса); *С. Окуличъ* (Варшава); *М. Селиховъ* (Полтава); *А. Варенцовъ* (Ростовъ н. Д.); *С. Адамовичъ* (с. Спасское); *Б. Лобачъ-Жученко* (Саратовъ); *С. Копровскій* (с. Дяткевичи).

№ 14 (3 сер.). Около круга даннаго радіуса R описана равнобедренная трапеція; найти minimum полной поверхности и объема тѣла, получаемаго при вращеніи этой трапеціи около большаго изъ основаній ея.

Обозначимъ черезъ x половину меньшаго и черезъ y половину большаго изъ основаній трапеціи, черезъ S — полную поверхность тѣла и черезъ V его объемъ. Легко показать, что

$$xy = R^2,$$
$$S = 4\pi R(3x + y),$$
$$V = {}^8/_3\pi R^2(2x + y),$$

откуда

$$\min. S = 4\pi R. \min. (3x + y),$$
$$\min. V = {}^8/_3\pi R^2. \min. (2x + y).$$
$$3x.y = 3R^2,$$
$$2x.y = 2R^2.$$

Такъ какъ R величина постоянная, то можно воспользоваться теоремой: *сумма двухъ перемѣнныхъ величинъ, которыхъ произведеніе величина постоянная, пріобрѣтаетъ minimum при равенствѣ слагаемыхъ.* Примѣняя эту теорему, находимъ, что

$$\min. S = 8\pi R^2\sqrt{3} \text{ при } x = \frac{R\sqrt{3}}{3} \text{ и } y = R\sqrt{3},$$

$$\text{и } \min. V = {}^{16}/_3\pi R^3\sqrt{2} \text{ при } x = \frac{R\sqrt{2}}{2} \text{ и } y = R\sqrt{2}.$$

К. Щиголевъ (Курскъ); *Я. Блюмбергъ* (Рига); *П. Ивановъ* (Одесса); *К.* и *Θ* (Тамбовъ); *А. Варенцовъ* (Ростовъ н. Д.).

№ 16 (3 сер.). Данъ треугольникъ. Центры внѣ вписанныхъ въ него круговъ O_1, O_2, O_3 соединены прямыми. Выразить площадь треугольника $O_1O_2O_3$ въ функціи сторонъ даннаго треугольника и радіуса круга описаннаго.

Очевидно, что $\Delta\, ABC$ есть ортоцентрическій относительно треугольника $O_1O_2O_3$. Извѣстно, что площадь всякаго треугольника равна произведенію радіуса описаннаго около него круга на полупериметръ

ортоцентрическаго треугольника *). Поэтому, называя радіусъ круга, описаннаго около $\triangle\ O_1O_2O_3$ черезъ R_1, получимъ:

$$\text{пл. } O_1O_2O_3 = {}^1/_2\,(a+b+c)\,R_1,$$

а такъ какъ $R_1 = 2R$, гдѣ R есть радіусъ описаннаго около $\triangle\ ABC$ круга **), то

$$\text{пл. } O_1O_2O_3 = (a+b+c)R.$$

П. Хлѣбниковъ (Тула); *С. Копровскій* (с. Дяткевичи); *К. Щиголевъ* (Курскъ); *П. Ивановъ* (Одесса).

№ 18 (3 сер.). Опредѣлить сумму n членовъ

$$\operatorname{tg}a.\operatorname{tg}b + \operatorname{tg}b.\operatorname{tg}c + \operatorname{tg}c.\operatorname{tg}d + \cdots + \operatorname{tg}u.\operatorname{tg}v,$$

если $a, b, c, d, \ldots u, v$ составляютъ ариѳметическую прогрессію.

Пусть разность прогрессіи равна α. Извѣстно, что

$$\operatorname{tg}(b-a) = \frac{\operatorname{tg}b - \operatorname{tg}a}{1+\operatorname{tg}a.\operatorname{tg}b},$$

откуда

$$\operatorname{tg}a.\operatorname{tg}b = \frac{\operatorname{tg}b - \operatorname{tg}a}{\operatorname{tg}(b-a)} - 1;$$

по аналогіи

$$\operatorname{tg}b.\operatorname{tg}c = \frac{\operatorname{tg}c - \operatorname{tg}b}{\operatorname{tg}(c-b)} - 1,$$

$$\operatorname{tg}c.\operatorname{tg}d = \frac{\operatorname{tg}d - \operatorname{tg}c}{\operatorname{tg}(d-c)} - 1,$$

. . . .

$$\operatorname{tg}u.\operatorname{tg}v = \frac{\operatorname{tg}v - \operatorname{tg}u}{\operatorname{tg}(v-u)} - 1.$$

Складывая эти выраженія и обозначая черезъ S искомую сумму, найдемъ

$$S = \frac{\operatorname{tg}v - \operatorname{tg}a}{\operatorname{tg}\alpha} - n = \frac{\sin(v-a)}{\cos a.\cos v.\operatorname{tg}\alpha} - n.$$

Я. Тепляковъ (Радомысль).

№ 22 (3 сер.). Показать, что удвоенный отрѣзокъ одной изъ равныхъ сторонъ равнобедреннаго треугольника, заключенный между основаніемъ и биссекторомъ противолежащаго угла, есть средняя гармоническая между основаніемъ и одной изъ равныхъ сторонъ.

Обозначимъ отрѣзокъ, о которомъ говорится въ задачѣ, черезъ x,

---

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики", сем. I, стр. 58.

**) l. c. стр. 56.

основаніе треугольника—черезъ b, одну изъ равныхъ сторонъ—черезъ a. Очевидно

$$\frac{x}{a-x}=\frac{b}{a},$$

откуда

$$x=\frac{ab}{a+b};\ 2x=\frac{2ab}{a+b}.$$

В. Попандопуло, П. Ивановъ (Одесса); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка); *Л. Калишевъ, П. Хлѣбниковъ* (Тула); *К.* и *Θ.* (Тамбовъ); *С. Копровскій* (с. Дяткевичи); *К. Щиголевъ* (Курскъ); *М. Пряслов*ъ (Ревель); *А. Варенцовъ* (Шуя).

№ 23 (3 сер.). Не рѣшая неопредѣленнаго уравненія

$$x^2+y^2=a^2+b^2+2cd,$$

гдѣ a, b, c, d суть данныя прямыя, построить пару его рѣшеній.

Построивъ прямую $m=\sqrt{2c.d}$, т. е. среднюю пропорціональную между $2c$ и d, получимъ

$$x^2+y^2=a^2+b^2+m^2;$$

построивъ затѣмъ прямую $n=\sqrt{a^2+b^2+m^2}$, получимъ

$$x^2+y^2=n^2,$$

т. е. всякія двѣ хорды, соединяющія какую нибудь точку окружности, радіусъ которой $= {}^n/_2$, съ концами діаметра, дадутъ пару рѣшеній.

Очевидно, что x и y представляютъ діагонали трапеціи, коей параллельныя стороны суть c и d, а непараллельныя—a и b.

В. Попандопуло (Одесса); *Г. Легошинъ* (с. Знаменка); *К.* и *Θ.* (Тамбовъ); *М. Пряслов*ъ (Ревель); *А. Варенцовъ* (Рост. н. Д.); *Я. Блюмбергъ* (Рига); *Ю. Идельсонъ* (Винница); *П. Хлѣбниковъ* (Тула); *К. Щиголевъ* (Курскъ).

№ 27 (3 сер.). Построить треугольникъ по углу, перпендикуляру, опущенному изъ вершины этого угла на противоположную сторону, и перпендикуляру, опущенному изъ вершины другого угла на противоположную ему сторону.

Пусть A данный уголъ. Строимъ прямоугольный треугольникъ ABD по углу A и катету $BD=h_b$, изъ точки A радіусомъ h_a описываемъ окружность и изъ B проводимъ къ ней касательную, пересѣкающую AD въ точкѣ C. Треугольникъ ABC есть требуемый. Задача вообще имѣетъ 2 рѣшенія.

П. Ивановъ (Одесса); *Ф. Грековъ* (Изюмъ); *Н. Лукницкій* (Полоцкъ); *А. Варенцовъ* (Рост. н. Д.); *С. Окуличъ, О. Сивчинскій* (Варшава); *В. Рюминъ* (Николаевъ); *И. Ходановичъ* (Кіевъ); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка); *М. Пряслов*ъ (Ревель); *Л. Калишевъ, П. Хлѣбниковъ* (Тула); *Ю. Идельсонъ* (Винница); *Я. Блюмбергъ* (Рига); *О. Ривошъ* (Вильна); *М. Селиховъ* (Полтава); *К. Щиголевъ* (Курскъ); *А. П.* (Ломжа); *С. Адамовичъ* (с. Спасское); *Л. Беркманъ* (Бѣлостокъ).

№ 28 (3 сер.). Безъ помощи тригонометріи найти углы равнобочной трапеціи, зная, что радіусъ круга, описаннаго около нея, равенъ ея діагонали.

Такъ какъ острый уголъ трапеціи опирается на дугу въ 60^0 (ибо она стягивается хордой, равной радіусу) то онъ равенъ 30^0. Тупой уголъ равенъ $180^0 - 30^0 = 150^0$.

П. Ивановъ (Одесса); *І. Өеодоровъ* (Тамбовъ); *Н. Лукницкій* (Полоцкъ); *В. Рюминъ* (Николаевъ); *И. Ходановичъ* (Кіевъ); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка); *С. Копровскій* (с. Дяткевичи); *М. Пряслов* (Ревель); *А. Варенцовъ* (Рост. н. Д.); *Л. Калишевъ* (Тула); *Я. Блюмбергъ* (Рига); *О. Ривошъ* (Вильна); *М. Селиховъ* (Полтава); *К. Щиголевъ* (Курскъ); *А. П.* (Ломжа); *Л. Беркманъ* (Бѣлостокъ).

№ 29 (3 сер.). Найти minimum полной поверхности и объема тѣла вращенія, описаннаго около шара радіуса R и состоящаго изъ двухъ равныхъ усѣченныхъ конусовъ, сложенныхъ вмѣстѣ большими основаніями.

Обозначимъ черезъ x радіусъ меньшаго основанія и черезъ y радіусъ большаго основанія каждаго изъ двухъ равныхъ усѣченныхъ конусовъ, черезъ S—полную поверхность всего тѣла и черезъ V объемъ его. Легко показать, что

$$y = \frac{x^2 + R^2}{2x},$$

$$S = 2\pi(x^2 + xy + y^2),$$

$$V = {}^2/_3\pi R(x^2 + xy + y^2),$$

откуда

$$\min. S = 2\pi.\min(x^2 + xy + y^2),$$

$$\min. V = {}^2/_3\pi.R.\min.(x^2 + xy + y^2).$$

Слѣдовательно надо найти $\min.(x^2 + xy + y^2)$. Обращая вниманіе на зависимость между x и y, получимъ:

$$x^2 + xy + y^2 = {}^1/_4\left(7x^2 + \frac{R^4}{x^2} + 4R^2\right);$$

слѣдовательно

$$\min.(x^2 + xy + y^2) = {}^1/_4\min.\left(7x^2 + \frac{R^4}{x^2} + 4R^2\right) =$$

$$= {}^1/_4\left[\min.\left(7x^2 + \frac{R^4}{x^2}\right) + 4R^2\right].$$

Итакъ задача приводится къ нахожденію

$$\min.\left(7x^2 + \frac{R^4}{x^2}\right),$$

но

$$7x^2\cdot\frac{R^4}{x^2} = 7R^4,$$

а извѣстно, что *сумма двухъ перемѣнныхъ величинъ, которыхъ произведеніе величина постоянная, пріобрѣтаетъ minimum при равенствѣ слагаемыхъ*; пользуясь этой теоремой, находимъ, что

$$\min. S = \pi R^2(2 + \sqrt{7}),$$

и

$$\min. V = {}^1/_3\pi R^3(2 + \sqrt{7}),$$

$$\text{при } x = \frac{R}{\sqrt[4]{7}}.$$

Я. Блюмбергъ (Рига).

№ 412 (2 сер.). Если сложить сумму, разность, произведеніе и частное двухъ цѣлыхъ чиселъ, то получимъ 450($=a$). Найти эти числа. Сколько рѣшеній? Какому условію должно удовлетворять число a, чтобы рѣшеніе было возможно въ положительныхъ числахъ?

Пусть одно изъ искомыхъ чиселъ будетъ x, другое y. Тогда

$$(x+y)+(x-y)+xy+{}^{x}/_{y}=a=450,$$

или

$$\frac{x(1+y)^2}{y}=a=450=1.2.3^2.5^2,$$

откуда

$$1)\ 1+y=-1;\ 2)\ 1+y=\pm 3;\ 3)\ 1+y=\pm 5;\ 4)\ 1+y=\pm 15$$

$$y=-2,\ 2,-4,\ 4,-6,\ 14,-16.$$

$$x=-900,\ 100,-200,\ 72,-108,\ 28,-32.$$

Очевидно, что рѣшеніе въ положительныхъ числахъ возможно тогда, когда a положительно и дѣлится нацѣло на квадратъ отличнаго отъ единицы цѣлаго числа.

П. Ивановъ (Одесса); *К. Исаковъ* (Манглисъ); *Я. Тепляковъ* (Радомысль); *В. Баскаковъ* (Ив.-Featureнес.).

№ 475 (1 сер.) и **№ 11** (3 сер.)*). Въ плоскости треугольника ABC найти точки M и N при условіи, что каждая изъ суммъ

$$MA+MB+MC \text{ и } \overline{NA}^2+\overline{NB}^2+\overline{NC}^2$$

есть наименьшая.

Разсмотримъ треугольникъ AOB, у котораго $\angle AOB=120^0$. Возьмемъ внутри его точку x и соединимъ ее съ вершинами

$$\overline{AX}^2=\overline{AO}^2+\overline{XO}^2-2AO\cdot XO\cdot\cos\angle AOX.$$

Такъ какъ $\cos\angle AOX<1$, то

$$\overline{AX}^2>\overline{AO}^2+\overline{XO}^2\cos^2\angle AOX-2\overline{AO}\cdot\overline{XO}\cdot\cos\angle AOX$$

и

$$\overline{AX}>\overline{AO}-\overline{XO}\cos\angle AOX.$$

Точно также докажемъ, что

$$\overline{BX}>\overline{BO}-\overline{XO}\cos\angle BOX.$$

*) Задача № 11 (3 сер.) была формулирована такъ: Въ плоскости даннаго треугольника найти такую точку, чтобы сумма квадратовъ ея разстояній отъ вершинъ даннаго треугольника была бы minimum.

Послѣ этого находимъ

$$AX + BX + OX > AO + BO + XO - XO(\cos\angle AOX + \cos\angle BOX),$$

или $AX + BX + OX > AO + BO + XO - 2\,XO \cos 60^0 \cos \frac{\angle AOX - \angle BOX}{2}$

Такъ какъ $2\cos 60^0 = 1$ и $\cos \frac{\angle AOX - \angle BOX}{2} < 1$,

то $$AX + BX + OX > AO + BO.$$

То же самое будетъ имѣть мѣсто, если $\angle AOB > 120^0$.

Теперь разсмотримъ треугольникъ ABC, у котораго каждый изъ угловъ $< 120^0$. Начертимъ на сторонѣ AB сегментъ, вмѣщающій уголъ въ 120^0. Внутри этого сегмента возьмемъ точку P' и соединимъ ее съ вершинами треугольника. Точку пересѣченія дуги сегмента съ прямою CP' обозначимъ черезъ P. Соединяемъ точку P съ A и B. Такъ какъ уголъ APB равенъ 120^0, то $\overline{AP} + \overline{BP} < \overline{AP'} + \overline{BP'} + \overline{PP'}$.

Прибавляя по CP, находимъ

$$AP + BP + CP < AP' + BP' + CP'.$$

Значитъ, точка M, для которой сумма $AM + BM + CM$ есть minimum, находится на дугѣ сегмента или внѣ сегмента, описаннаго на сторонѣ AB и вмѣщающаго уголъ въ 120^0. Точно также убѣдимся, что искомая точка M будетъ находиться внѣ сегментовъ, описанныхъ на сторонахъ BC и CA и вмѣщающихъ углы въ 120^0, или-же на дугахъ этихъ сегментовъ. Такимъ образомъ искомая точка M находится въ пересѣченіи трехъ дугъ: стороны треугольника видны изъ нея подъ углами въ 120^0.

Если одинъ изъ угловъ треугольника будетъ 120^0 или болѣе, то искомая точка совпадетъ съ вершиной тупого угла.

Обозначимъ точку пересѣченія медіанъ треугольника ABC черезъ G и черезъ N какую нибудь точку. Извѣстно, что

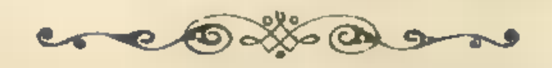
$$\overline{AN}^2 + \overline{BN}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG} + 3\overline{GN}^2.$$

Отсюда видно, что точка N, для которой сумма $\overline{AN}^2 + \overline{BN}^2 + \overline{CN}^2$ имѣетъ наименьшее значеніе, есть точка пересѣченія медіанъ треугольника ABC.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

NB. Задачу № 11 (3 сер.) вѣрно рѣшили гг. *К.* и *Θ.* (Тамбовъ).

ПОЛУЧЕНЫ РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ отъ слѣдующихъ лицъ: *К. Зновицкаго* (Кіевъ) 19, 26 (3 сер.), 527 (2 сер.) и 6 (Мал. Вопр.); *А. Варенцова* (Шуя) 44, 45, 53, 62, 66, 68, 82 (3 сер.); *П. Бѣлова* (с. Знаменка) 463 (1 сер.) и 573 2 сер.); *XYZ*(?) 81 (3 сер.); *А. Бачинскаго* (Холмъ) 77, 80, 81, 82 (3 сер.); *Гольдблата*(?) 68 (3 сер.); *Н. Кокушина* (Оленецкъ) 66 (3 сер.).



Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Одесса, 24-го Сентября 1894 г.

„Центральная типо-литографія“, уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. Болгарова.

L'ASTRONOMIE

№ 6.—1894.

Le soleil et ses flammes. *C. Flammarion.* Свѣдѣнія о солнцѣ, имѣющіяся въ любомъ учебникѣ космографіи, изложенныя живо и увлекательно.

Les orages et leur relation avec la lune. *E. Renou.* Послѣ того какъ Poincaré доказалъ, что предѣлы распространенія пассатовъ измѣняются вмѣстѣ съ склоненіемъ луны, явился вопросъ, не находится-ли въ зависимости отъ склоненія луны число грозъ, такъ какъ грозовыя облака приносятся Ю. З. вѣтрами (рѣчь идетъ о Франціи). Изъ 574 грозъ, бывшихъ въ Parc de Saint Maur въ теченіе 21 года, 302 происходили при С. склоненіи луны, 272 при Ю., слѣд. на долю С. склоненія приходится грозъ больше. Чтобы рельефнѣе обнаружить это обстоятельство, Renou считаетъ только тѣ грозы, при которыхъ склоненіе луны (С. или Ю.) больше 10^0 и получаетъ при С. скл. —227, при Ю.—198. Для склоненій меньше 10^0 разница не такъ чувствительна, а именно: 75 при С. и 74 при Ю. скл. Тотъ же результатъ полученъ въ Saint Servan (изъ 16-лѣтнихъ наблюденій), а именно: 188 при С. ск. и 100 при Ю. скл. Такимъ образомъ приведенными наблюденіями вопросъ рѣшается утвердительно.

Appareils enregistreurs de l'atmosphère solaire. *H. Deslandres.* До 1868 года хромосферу солнца можно было наблюдать только во время полныхъ солнечныхъ затменій. Въ 1868 году Жансеномъ и Локьеромъ былъ указанъ способъ наблюденія хромосферы внѣ затменій; для этой цѣли наводятъ щель спектроскопа на край солнца и получаютъ два спектра: непрерывный, принадлежащій солнцу и спектръ, состоящій изъ немногихъ свѣтлыхъ (розовыхъ) линій, принадлежащихъ водороду хромосферы; если при помощи сильнаго свѣторазсѣянія ослабить первый спектръ, то останется только второй, причемъ свѣтлыя линіи принимаютъ форму протуберанцевъ. Недавно Joung'омъ замѣчены въ спектрѣ хромосферы кромѣ розовыхъ весьма слабые для глаза, но сильные своимъ химическимъ дѣйствіемъ фіолетовые лучи, принадлежащіе парамъ кальція; пользуясь этими лучами можно фотографировать и тѣ части хромосферы, которыя проектируются на дискъ солнца; такимъ образомъ становится доступнымъ изученію все, обращенное къ намъ, полушаріе солнца. Для изученія формы и движенія хромосферы важно имѣть автоматическіе приборы, непрерывно или черезъ малые промежутки времени фотографирующіе хромосферу. Изложеніемъ сущности устройства такихъ приборовъ (спектрографовъ) и занята остальная часть статьи.

Dislocation d'une comète. Къ статьѣ приложены двѣ фотографіи кометы Brooks'a, распавшейся на двѣ кометы; фотографіи сняты 21-го и 22-го октября 1893 г. въ обсерваторіи Lick'a. Первая изображаетъ комету въ началѣ распаденія, вторая — послѣ распаденія.

Anomalies de la pesanteur, presentées par le continent Nord Américain. *Defforges.* Изъ многихъ измѣреній напряженія силы тяжести, произведенныхъ въ разныхъ мѣстахъ, слѣдуетъ, что на берегахъ морей напряженіе тяжести пропорціонально квадрату синуса широты (законъ Clairaut); на островахъ, расположенныхъ среди глубокихъ частей моря, напряженіе тяжести *больше*, внутри континента Стараго Свѣта *меньше*, чѣмъ слѣдуетъ по закону Clairaut. Defforges съ цѣлью провѣрить, замѣчается-ли то-же явленіе въ Новомъ Свѣтѣ, произвелъ рядъ измѣреній въ С. Америкѣ. Въ слѣдующей таблицѣ помѣщены величины g наблюденныя и приведенныя къ уровню моря (по формулѣ Bouguer'a), вычисленныя по закону Clairaut, принимая во вниманіе сжатіе земли, и аномаліи:

	g набл.	Редукція Bouguer'a	g редукц.	g вычис.	Аномалія
Washington	9,80167	+ 2	9,80169	9,80142	+ 27
Montréal	9,80729	+ 18	9,80747	9,80716	+ 31
Chicago	9,80345	+ 30	9,80375	9,80386	— 11
Denver	9,79684	+ 299	9,79983	9,80216	— 233
Salt Lake City	9,79816	+ 234	9,80050	9,80293	— 243
M. Hamilton	9,79683	+ 233	9,79916	9,79991	— 75
San Francisco	9,80016	+ 21	9,80037	9,80030	+ 7

Изъ таблицы слѣдуетъ, что и въ С. Америкѣ аномаліи отрицательны, на о—вахъ же Великаго и Тихаго ок. онѣ положительны.

Visibilité pour diverses hauteurs. *Ch. Dufour.* См. „В. О. Ф." № 193, стр. 17.

Hommage du Bureau des longitudes à M. Faye. *C. Flammarion.*

Société astronomique de France. Séance du 2 Mai.

Variétés.

К. Смоличъ (Умань).

БИБЛІОГРАФИЧЕСКІЙ ЛИСТОКЪ
НОВѢЙШИХЪ РУССКИХЪ ИЗДАНІЙ.

Евтушевскій, В. А. Сборникъ ариѳметическихъ задачъ и численныхъ примѣровъ для приготовительнаго и систематическаго курса. Вторая часть—дроби. Изд. 19-е. Спб. 1894.

Зобовъ, Н. Бесѣды о природѣ. Книга для чтенія въ селахъ и деревняхъ, въ которой разсказывается о землѣ, солнцѣ, звѣздахъ, растеніяхъ и животныхъ. Изд. 14-е книгопр. В. Губинскаго. Спб. 1894. Ц. 50 к.

Киселевъ, А. Систематическій курсъ ариѳметики. Изд. 7-е книжн. магазина В. Думнова. Москва. 1894. Ц. 75 к.

Лугининъ, В. Ф. Описаніе различныхъ методовъ опредѣленія теплотъ горѣнія органическихъ соединеній. Москва. 1894.

Панфиловъ, И. Десятиводные гидраты бромистаго и іодистаго магнія. Казань, 1894.

Пржевальскій, Е. Собраніе геометрическихъ теоремъ и задачъ. Изд. 6-е, исправленное. Москва. 1894. Ц. 1 р. 60 к.

Сводъ постановленій международныхъ метеорологическихъ конференцій отъ лейпцигской конференціи въ августѣ 1872 до мюнхенской конференціи въ августѣ 1891 г. включительно. (Приложеніе къ LXXV тому записокъ Имп. академіи наукъ № 2). Спб. 1894. Ц. 75 к.

Сусловъ, Г. К., проф. Кинетогеометрическая интерпретація трехмѣрныхъ пространствъ постоянной кривизны (Римана и Лобачевскаго). Кіевъ. 1894.

Біографіи знаменитыхъ математиковъ XIX столѣтія. Выпускъ II. Бернгардъ Риманнъ. Біографическій очеркъ, составленный Р. Дедекинд'омъ. Переводъ съ нѣмецкаго. Съ приложеніемъ списка сочиненій. Карлъ Густавъ Яковъ Якоби. Біографическій очеркъ, составленный Лежюнь-Дирикле. Переводъ съ нѣмецкаго. Съ приложеніемъ списковъ лекцій и сочиненій. Москва. 1894. Ц. 75 к.

— Вып. III. Гоёне Вронскій и его ученіе о философіи математики. Составлено прив.-доцентомъ Имп. моск. университета В. В. Бобынинымъ. Москва. 1894. Ц. 1 р.

Васильевъ-Яковлевъ, Н. Сборникъ задачъ по коммерческой ариѳметикѣ. Для коммерческихъ и реальныхъ училищъ. Сост. по программѣ М—ства Народ. Просвѣщенія. Изд. 4-е. Кіевъ. 1894. Ц. 80 к.

Дементьевъ, П. А. Фотографическій ежегодникъ, составленный при участіи: Н. А. Андріанова, Г. П. Анненкова, Г. Н. Бухковича, В. Бѣлова, Э. Валента и др. Съ 7-ю художественными приложеніями. Годъ III (1894 г.). Изд. Ѳ. Вёснеръ. Спб. 1894 г.

Карпинскій, А. П., акад. Разборъ сочиненія И. В. Мушкетова — физическая геологія, ч. I. Общія свойства земли, вулканическія, сейсмическія и дислокаціонныя явленія. (Спб. 1891). Спб.

Петровъ, Н., засл. проф. Никол. инж. акад. Треніе въ машинахъ. Вліяніе тренія при передачѣ работъ упругимъ ремнемъ. (Подтвержденіе теоріи, представленной мною въ 1893 г.). (Отт. изъ „Извѣстій технологическаго института" 1894 г.). Спб. 1894.

Погонинъ, А., инж.-мех. Термодинамика съ приложеніями къ совершеннымъ газамъ, насыщеннымъ парамъ, и тепловымъ машинамъ. Спб. 1894. Ц. 1 р. 60 к.

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

MATHESIS.

1894. — № 4.

Applications d'un théorème de Chasles; par *M. Balitrand* (fin. См. обзоръ M. № 3). Пусть на прямыхъ Ox и Oy заданы двѣ точки M и M′; если на тѣхъ-же прямыхъ взяты еще двѣ пары точекъ A и B, A′ и B′, удовлетворяющихъ условію

$$MA = k.\,M'A',\ MB = k.\,M'B',$$

то прямыя AA′, BB′, MM′ обертываютъ параболу, касательную къ осямъ Ox и Oy. На основаніи этого задача: *„опредѣлить главные элементы коническаго сѣченія, зная четыре касательныя къ нему и точку касанія одной изъ нихъ“* приводится къ извѣстной задачѣ построенія конич. сѣченія по двумъ даннымъ сопряженнымъ діаметрамъ его.

Теорема: *„Точки пересѣченія гомологичныхъ лучей двухъ гомографическихъ пучковъ находятся на коническомъ сѣченіи, проходящемъ черезъ центры пучковъ“* съ выгодой примѣняется въ тѣхъ случаяхъ, когда вопросъ касается перемѣщенія угла постоянной величины. M. Balitrand на основаніи этой теоремы доказываетъ слѣдующее основное предложеніе теоріи развертокъ: „если черезъ точку M кривой C провести прямую подъ угломъ ϑ къ нормали, то эта прямая обертываетъ развертку кривой C подъ угломъ ϑ; точка касанія развертки и обвертывающей ея прямой есть проэкція на эту прямую центра кривизны кривой C въ точкѣ M“.

Далѣе рѣшается задача (Neuberg'а): Дана кривая C и прямая XX′; касательная въ A къ C пересѣкаетъ XX′ въ точкѣ M; найти точку касанія биссектриссы угла AMX съ ея обверткой“. Наконецъ, при помощи теоремы Chasles'я доказывается теорема кинематики: *„При перемѣщеніи плоской неизмѣняемой фигуры, геометрическое мѣсто центровъ кривизны траэкторій точекъ прямой есть коническое сѣченіе, касательное въ мiновенномъ центрѣ съ его геометрическимъ мѣстомъ“.* (Кон. сѣч. *Rivals'я*).

Conditions pour qu'un système de trois axes soit trirectangle; par *M. F. Dauge*. Въ *Nouvelles Annalles de Mathématiques* № 2 за 1894 г. помѣщена замѣтка *M. Appell'я* о выводѣ условій перпендикулярности системы осей Ox, Oy, Oz, заданныхъ относительно другой системы осей Ox', Oy', Oz'. M. *Dauge* даетъ другой, вполнѣ элементарный методъ рѣшенія этого вопроса, основанный на выраженіяхъ въ косоугольныхъ координатахъ разстоянія точки отъ начала координатъ и косинуса угла между двумя прямыми.

Bibliographie: Premières leçons d'Algèbre élémentaire.—Nombre positifs et négatifs. Operations sur les polynômes; par H. Padé, (Paris. 1892. Prix 2 fr. 50 c.). Рецензія и оглавленіе.

Cours élémentaire de Géométrie descriptive; par I. Jacquemin (Liège. 1893. Prix 2 fr. 50 c.). Оглавленіе.

Notes mathématiques. 8. *Longueur de la bissectrice dans un triangle;* Par *M. L. Meurice*. По поводу замѣтки *M. Lauvernay*'я (Math. 1894. № 2) M. Meurice сообщаетъ свое доказательство равенства

$$AD^2 = (AB + BD)(AC - CD) = (AB - BD)(AC + CD),$$

гдѣ AD есть биссектрисса треугольника ABC, и показываетъ, какъ при помощи этого равенства доказывается теорема: *треугольникъ, у котораго двѣ биссектриссы равны, есть равнобедренный.*

9. *Note sur un lieu géométrique.* (J. N.). Авторъ сообщаетъ рѣшеніе M. A. C задачи *Milne*'а:

Черезъ фокусъ F эллипса проведена хорда MN; нормаль въ N и касательная въ M пересѣкаются въ точкѣ R. Геометрическое мѣсто этой точки выражается ур-емъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2y^2}{(2a^2-b^2)^2}=1.$$

Solutions de questions proposées. №№ 818, 859, 860, 861.

Questions d'examen. №№ 617—621.

Questions proposées. №№ 928—936.

Д. Е.

L'ASTRONOMIE

№ 7.—1894.

Le cirque lunaire Flammarion et ses environs. *L. Weinek.* Фотографія съ поясненіями.

La scilintation des étoiles et la prévision du temps. *Ch. Dufour.* Профессоръ Астрономіи Лозанскаго университета Dufour изъ своихъ 38-лѣтнихъ наблюденій надъ мерцаніемъ звѣздъ пришелъ къ заключенію, что слабое мерцаніе предвѣщаетъ дурную погоду. Интересно провѣрить справедливость этого положенія при другихъ климатическихъ условіяхъ. Статья содержитъ указанія, какъ взяться за подобныя наблюденія*).

Nouvelle mesure de la superficie de la France. *Derrécagaix.* Въ виду того, что старыя измѣренія поверхности Франціи давали цифры, сильно разнящіяся другъ отъ друга, недавно подъ руководствомъ генерала Derrécagaix было произведено новое измѣреніе по слѣдующему методу: предполагается, что земля имѣетъ видъ эллипсоида вращенія, размѣры котораго опредѣлены величиной сжатія и большой полуоси; если на этомъ эллипсоидѣ начерчена карта Франціи, то измѣренію подлежитъ часть поверхности внутри границъ; проведя меридіаны и параллели черезъ каждыя 10′, мы разобьемъ всю поверхность на сумму полныхъ и неполныхъ четыреугольныхъ клѣтокъ; площади полныхъ клѣтокъ легко вычислить (для приближеннаго вычисленія поверхности клѣтки умножаютъ длину дуги меридіана въ 10′ на длину параллели проведенной черезъ средину (т. е. эллипсоидальная поверхность замѣняется поверхностью усѣченнаго конуса, касающагося эллипсоида по средней параллели клѣтки и имѣющаго образующую, равную развернутой дугѣ меридіана въ 10′); что касается неполныхъ клѣтокъ, то часть, лежащая внутри границъ каждой, измѣряется планиметромъ; тѣмъ же планиметромъ измѣряется площадь всей клѣтки и находится, какую часть всей клѣтки составляетъ подлежащая измѣренію часть, а такъ какъ площадь всей клѣтки дается вычисленіемъ, то становится извѣстной и измѣряемая часть. Въ планиметрѣ (Coradi), служившемъ для измѣренія, остріе замѣняется микроскопомъ съ перекрестными нитями, увеличивающимъ въ 20 разъ и самое измѣреніе производится не на бумагѣ, а на мѣдныхъ доскахъ (на которыхъ карта награвирована). Такое измѣреніе дало цифры 536464, 536469 и 536479 кв. кил., смотря по тому, какія взять цифры для сжатія и полуоси. Статья содержитъ детали измѣренія; въ примѣчаніи къ ней помѣщены нѣкоторыя историческія справки.

Les rayons lumineux curvilignes. *Ch. Ed. Guillaume.* Если лучъ свѣта попадаетъ въ среду, состоящую изъ слоевъ, преломляющая способность которыхъ постепенно возрастаетъ, то онъ изгибается по направленію къ болѣе преломляющимъ. Изъ этого слѣдуетъ, что если мы возьмемъ небесное тѣло достаточно большое и съ достаточно плотной атмосферой, то радіусъ кривизны луча, выходящаго изъ какой нибудь точки A тѣла, можетъ оказаться больше радіуса тѣла и лучъ упадетъ въ другую точку B этого-же тѣла, такъ что изъ B будетъ видна A (если не принимать въ разсчетъ поглощенія). Возможенъ такой случай, что изъ одной точки планеты будетъ видна вся ея поверхность въ видѣ чашки (cuvette); при этомъ антиподъ

---

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики“, № 172, стр. 87.